Unidad V

Transformaciones lineales.

5.1 Introducción a las transformaciones lineales.

El presente capitulo aborda una clase especial de funciones denominadas transformaciones lineales que ocurren con mucha frecuencia en el algebra lineal y otras ramas de las matematicas. Estas tienen una gran variedad de aplicaciones importantes. Antes de definirlas, se estudiaran dos ejemplos sencillos para ver lo que es posible realizar.

Ejemplo 1: reflexión respecto al eje x

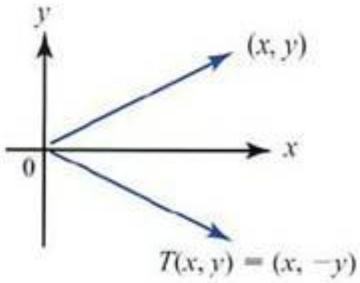
En R2 se define una función T mediante la formula T(x;y)=(x;-y). Geométricamente, T toma un vector en R2 y lo refleja respecto al eje x. esto se ilustra en la figura. Una vez que se ha dado la definición básica, se vera que T es una transformación lineal de R2 en R2.

Ejemplo 2: transformación de un vector de producción en un vector de materia prima.

Un fabricante elabora cuatro tipos de productos distintos, de los cuales cada uno requiere tres tipos de materiales. Se identifican los cuatro productos como P1, P2, P3, y P4 y a los materiales por R1, R2 y R3. La tabla siguiente muestra el numero de unidades de cada materia prima que se requieren para fabricar 1 unidad de cada producto.

Ejemplo 2: transformación de un vector de producción en un vector de materia prima.

Un fabricante elabora cuatro tipos de productos distintos, de los cuales cada uno requiere tres tipos de materiales. Se identifican los cuatro productos como P1, P2, P3, y P4 y a los materiales por R1, R2 y R3. La tabla siguiente muestra el numero de unidades de cada materia prima que se requieren para fabricar 1 unidad de cada producto.



	Necesarios para producir 1 unidad de				
		P_1	P_2	P_3	P_4
Número de unidades de materia prima	R_1	2	1	3	4
	R_2	4	2	2	1
	R_3	3	3	1	2

Surge una pregunta natural: si se produce cierto número de los cuatro productos, ¿Cuántas unidades de cada material se necesitan? Seanp1, p2, p3 y p4 el número de artículos fabricados en los cuatro productos y sean r1, r2, y r3 el número de unidades necesarios de los tres materiales. Entonces se define

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, suponga que P=(10,30,20,50). ¿Cuántas unidades de R1 se necesitan para producir estos números de unidades de los cuatro productos? De la tabla se tiene que

r=p1*2+p2*1+p3*3+p4*4=10*2+30*1+20*3+50*4=310 unidades

de manera similar r2=10*4+30*2+20*2+50*1=190 unidades

y r3=10*3+30*3+20*1+50*2=240 unidades

en general se ve que

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

o Ap= r.

Esto se puede ver de otra manera. Si a p se le conoce como le vector de producción y a r como el vector de materia prima, se define la función T por = T(p) = Ap. Esto es, T es la función que "transforma" el vector de producción en el vector de materia prima y se hace mediante la multiplicación de matrices ordinaria. Como se verá , esta función es también una transformación lineal.

Antes de definir una transformación lineal, hablaremos un poco sobre las funciones. En la sección 1.7 se escribió un sistema de ecuaciones como

Ax=b

Donde A es una matriz de m*n, x R" y b R". Se pidió encontrar x cuando A y b se conocían . No obstante, esta ecuación se puede ver de otra forma: suponga que A se conoce. Entonces la ecuación Ax=b "dice" : proporcione una x en R´´ y yo le daré una b en R´´´; es decir , A representa una función con dominio R´´ e imagen en R´´´.

La función que se acaba de definir tiene las propiedades de que A (si es un escalar y A(x + y) = Ax + Ay. Esta propiedad caracteriza las transformaciones lineales.

Definición 1 transformación lineal

Sean V y W espacios vectoriales reales. Una transformación lineal T de V en W es una función que asigna a cada vector v V un vector único Tv W y que satisface, para cada u y v en V y cada escalar .

T(u + v) = Tu + Tv

Y

T(av)=aTv

TRES OBSERVACIONES SOBRE NOTACIÓN

1. Se escribe T: v W para indicar que T toma el espacio vectorial real V y lo lleva al espacio vectorial real W; esto es, T es una función con V como su dominio y un subconjunto de W como su imagen.

2. Se escriben indistintamente Tv y T(v). Denotan lo mismo; las dos se leen "T de v". Esto es análogo a la notación funcional ʆ(x), que se lee "ʆ de x".

3. Gran parte de las definiciones y teoremas en este capítulo también se cumplen para los espacios vectoriales complejos (espacios vectoriales en donde los escalares son números complejos).

Ejemplo 3. Una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$

Sea T: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & + & y \\ x & - & y \\ & & 3y \end{pmatrix}$. Por ejemplo $T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -9 \end{pmatrix}$. Entonces

---

$$T\left[\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x1 & + & x2 \\ y1 & + & y2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 & + & x2 & + & y1 & + & y2 \\ x1 & + & x2 & - & y1 & - & y2 \\ & & 3y1 & + & 3y2 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x1 & + & y1 \\ x1 & - & y1 \\ & 3y1 & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x2 & + & y2 \\ x2 & - & y2 \\ & 3y2 & \end{pmatrix}$$

Pero

$$\begin{pmatrix} x1 & + & y1 \\ x1 & - & y1 \\ & 3y1 & \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} x2 & + & y2 \\ x2 & - & y2 \\ & 3y2 & \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

Así

$$T\left[\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} x1 \\ y1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x2 \\ y2 \end{pmatrix}$$

De manera similar

$$T\left[\propto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] = T\begin{pmatrix} \propto x \\ \propto y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \propto x & + & \propto y \\ \propto x & - & \propto y \\ & 3 \propto y & \end{pmatrix} = \propto \begin{pmatrix} x & + & y \\ x & - & y \\ & 3y & \end{pmatrix} = \propto T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

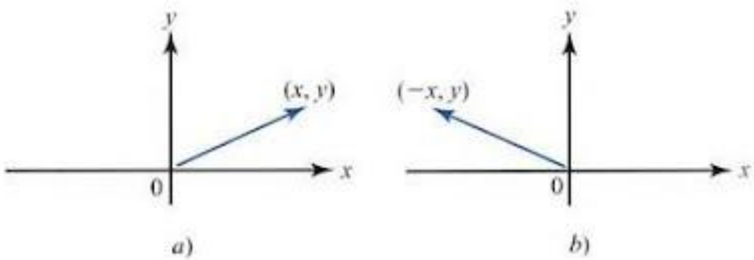
Así, T es una transformación lineal.

Ejemplo 5 La transformación identidad

Sea V un espacio vectorial y definida I: V V por Iv = v para todo v en V. Aquí es obvio que es I es una transformación lineal, la cual se denomina transformación identidad u operador identidad.

Ejemplo 6 Transformación de reflexión

Sea T:R2 R2 definida por T(x;y)=(x;-y). Es fácil verificar que T es lineal. En términos geométricos, T toma un vector en R2 y lo refleja respecto al eje y (vea la figura 5.2)



Ejemplo 7 Transformaciones de Rn Rm dada por la multiplicación por una matriz de m*n.

Sea A una matriz de m*n y definida T:R´´ R´´´ por Tx = Ax. Como A(x + y) = Ax + Ay y A(si x y y están en R´´, se observa que T es una transformación lineal. Entonces: toda matriz A de m*n se puede utilizar para definir una transformación lineal de R´´ en R´´´.

5.2 Núcleo e imagen de una transformación lineal.
En esta sección se desarrollan algunas propiedades básicas de las transformaciones lineales.
Teorema 1. Sea T: V W una transformación lineal. Entonces para todos los vectores u, v, v1, v2,….vn en V y todos los escalares

i. $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

ii. $T(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = T\mathbf{u} - T\mathbf{v}$

iii. $T(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = \alpha_1 T\mathbf{v}_1 + \alpha_2 T\mathbf{v}_2 + \ldots + \alpha_n T\mathbf{v}_n$

Nota en la parte i el 0 de la izquierda es el vector cero en v; mientras que el cero de la derecha es el vector cero en W.
i. T(0) = T(0 + 0)= T(0) + T(0). Así 0= T(0) – T(0) = T(0) + t(0) – T(0) = T(0)
ii.T(u-v) = T[u + (-1)v] = Tu + T[(-1)v] = Tu + (-1)Tv = Tu – Tv.

iii.Esta parte se prueba por inducción (vea el apéndice 1). Para $n = 2$ se tiene $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = T(\alpha_1 v_1) + T(\alpha_2 v_2) = \alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2$. Así, la ecuación (1) se cumple para $n = 2$. Se supone que se cumple para $n = k$ y se prueba para $n=k + 1$: $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k-1}) = T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k) + T(\alpha_{k+1} v_{k+1})$, y usando la ecuación en la parte iii para $n= k$, esto es igual a $(\alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2 + \ldots \alpha_k T v_k) + \alpha_{k+1} T v_{k+1}$, que es lo que se quería demostrar. Esto completa la prueba.

Observación. Los incisos i) y ii) del teorema 1 son casos especiales del inciso iii). Un dato importante sobre las transformaciones lineales es que están completamente determinadas por el efecto sobre los vectores de la base.

Teorema 2 Sea v un espacio vectorial de dimensión finita con base $B= \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Sean $w_1, w_2, \ldots, w_n$ vectores en W. Suponga que T_1 y T_2 son dos transformaciones lineales de V en W tales que $T_1 v_i = T_2 v_i = w_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces para cualquier vector $v \in v$, $T_1 v = T_2 v$; es decir $T_1 = T_2$.
Como B es una base para V, existe un conjunto único de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Entonces, del inciso iii) del teorema 1, $T_1 v = T_1(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n)$
$= \alpha_1 T_2 v_1 + \alpha_2 T_2 v_2 + \ldots + \alpha_n T_n v_n = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n T_n v_n$

De manera similar $T_2 v = T_2(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_n v_n)$
$= \alpha_1 T_2 v_1 + \alpha_2 T_2 v_2 + \ldots + \alpha_n T_n v_n$ $= \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_n v_n$

Por lo tanto, $T_1 v = T_2 v$.

El teorema 2 indica que si T:v W y V tiene dimensión finita, entonces sólo es necesario conocer el efecto que tiene T sobre los vectores de la base en V. Esto es, si se conoce la imagen de cada vector básico, se puede determinar la imagen de cualquier vector en V. Esto determina T por completo. Para ver esto, sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ una base en V y sea v otro vector en V. Entonces, igual que en l aprueba del teorema 2, $Tv = \alpha_1 T v_1 + \alpha_2 T v_2 + \ldots + \alpha_n T v_n$

Así, se puede calcular Tv para cualquier vector $v \in V$ si se conocen $Tv_1, Tv_2, \ldots, Tv_n$

Ejemplo 1 Si se conoce el efecto de una transformación lineal sobre los vectores de la base, se conoce el efecto sobre cualquier otro vector.

Sea T una transformación lineal de R3 en R2 y suponga que

$$T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}\text{ y }\quad T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}.\text{ Calcule } T\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}.$$

Solución. Se tiene

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= 3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Surge otra pregunta; si w1,w2,….,wn son n vectores en W, ¿existe una transformación lineal T tal que $Tv_1 = w_1$ para i = 1,2,…,n? La respuesta es sí. Como lo muestra el siguiente teorema.

5.3 La matriz de una transformación lineal.

Si A es una matriz de m*n y T: Rn-Rm está definida por Tx = Ax, entonces, T es una transformación lineal. Ahora se verá que para toda transformación lineal de Rn en Rm existe una matriz A de m*n tal que Tx = Ax para todo x ϵ Rn. Este hecho es de gran utilidad. Si Tx = Ax. Entonces un T = NA e Im T = RA. más aun, v(T) = dim un T = v(A) y p(T) = dim Im T = p(A). Así se puede determinar el núcleo, la imagen, la nulidad y el rango de una transformación lineal de Rn-Rm determinando el espacio nulo y la imagen de la matriz correspondiente. Adicionalmente, una vez que se sabe que Tx = Ax. Se puede evaluar Tx para cualquier x en Rn mediante una simple multiplicación de matrices.

Pero esto no es todo. Como se verá, cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar mediante una matriz.

Teorema 1

Sea T:Rn -Rm una transformación lineal. Existe entonces una matriz única de m*n, AT tal que

$$Tx = A_T x \qquad \text{para toda } x \in \mathbb{R}^n$$

Demostración

Sea w1 = Te1,w2 = Te2,….,wn = Ten. Sea AT la matriz cuyas columnas son w1, w2,…., wn y hagamos que AT denote también ala transformación de Rn-Rm, que multiplica un vector en Rn por AT. si

$$\mathbf{w}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \text{ para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Entonces

$$A_T \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow i\text{-ésima posición} \\ \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = \mathbf{w}_i$$

De esta forma, ATei = wi para i = 1,2,….n., T y la transformación AT son las mismas porque coinciden en los vectores básicos.

Ahora se puede demostrar que AT es única. Suponga que Tx = ATx y que Tx = BTx para todo x ϵ Rn. Entonces ATx = BTx, o estableciendo CT= AT – BT, se tiene que CTx = 0 para todo x ϵ Rn. En particular, CTei es la columna i de CT. Así, cada una de las n columnas de CT es el m-vector cero, la matriz cero de m*n. Esto muestra que AT = BT y el teorema queda demostrado.

Definición 1 Matriz de transformación

La matriz AT en el teorema 1 se denomina matriz de transformación correspondiente a T o representación matricial de T.

NOTA. La matriz de transformación AT está definida usando las bases estándar tanto en Rn como en R3. Si se utilizan otras bases, se obtendrá una matriz de transformación diferente.

TEOREMA 2 sea AT la matriz de transformación correspondiente a laa transformación lineal T. entonces.

i. Im T = Im A = CAT

ii. P(T) = p(AT)

iii. Un T = NAT

iv. v(T) = v(AT

Ejemplo 1 Representación matricial de una transformación de proyección

Encuentre la matriz de transformación AT correspondiente ala proyección de un vector en R3 sobre el plano xy.

Solución

Aquí $T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$. En particular, $T\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $T\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Así,

$A_T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$. Observe que $A_T\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$.

Teorema 4

Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita con dim V = n. sea T:V-W una transformación lineal y sea AT una representación matricial de T respecto a las bases B1 en V y B2 en W. entonces

i. p(T) =p(AT) ii. V(A) = v(AT) iii. V(a) + p(T) = n

Teorema 5 Sea T:Rn-Rm una transformación lineal. Suponga que C es la matriz de transformación de T respecto a las bases estándar Sn y Sm en Rn y Rm, respectivamente. Sea A1 la matriz de transición de B2 a base Sm en Rm. Si AT denota la matriz de transformación de T respecto a las bases B1 y B2, entonces.

$$\boxed{A_T = A_2^{-1}CA_1}$$

Geometría de las transformaciones lineales de R2 en R2.

Sea T:R2-R2 una transformación lineal con representación matricial AT Ahora de demostrará que si AT es invertible, entonces T se puede escribir como una sucesión de una o más transformaciones especiales, denominadas expansiones, compresiones, reflexiones y cortes.

Expansiones a lo largo de los ejes x o y

Una expansión a lo largo del eje x es una transformación lineal que multiplica a la coordenada x de un vector en R2 por una constante C >1. Esto es

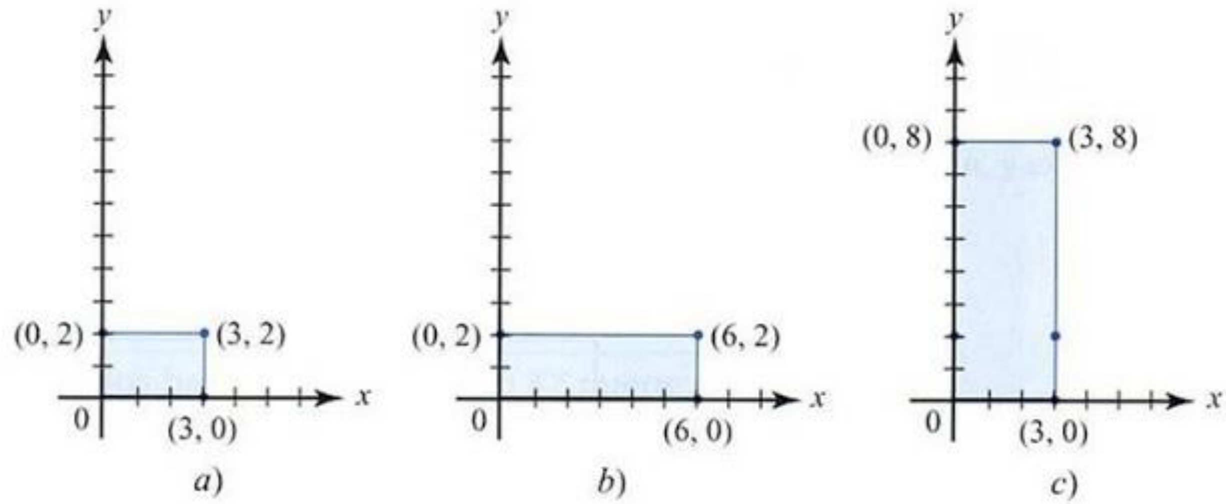
$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$$

Entonces $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, de manera que si $A_T = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, se tiene

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$$

De manera similar, una expansión a lo largo del eje y es una transformación lineal que multiplica la coordenada y de todo vector en R2 por una constante C>1. Como antes , si $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cx \\ y \end{pmatrix}$,

entonces la representación matricial de T es $A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}$ de manera que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ cy \end{pmatrix}$.



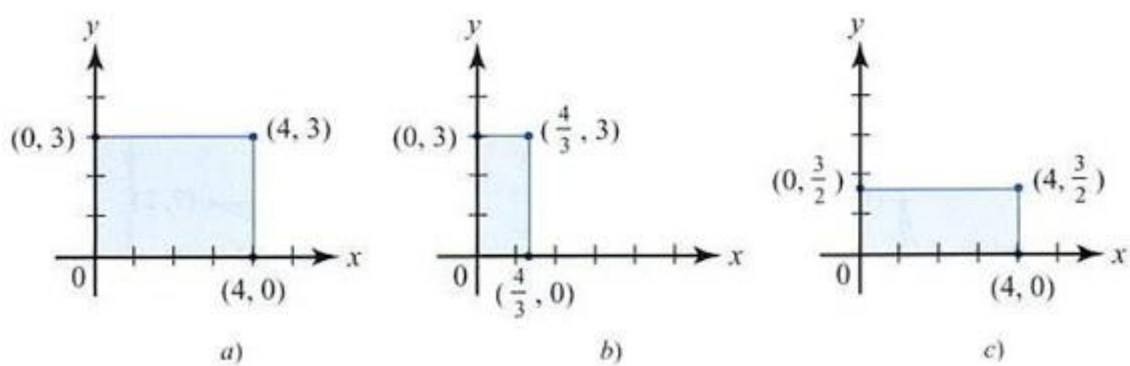
a) se comienza con este rectángulo.

b) Expansión en la dirección de x c = 2.

c) Expansión en la dirección de y con c = 4.

Compresión a lo largo de los ejes x o y.

Una compresión a lo largo de los ejes x o y es una transformación lineal que multiplica ala coordenada x o y de un vector en R2 por una constante positiva $0<c<1$, mientras que para la expansión $c<1$.



a) se comienza con este rectángulo.

b) Compresión a lo largo del eje x con c =1/3.

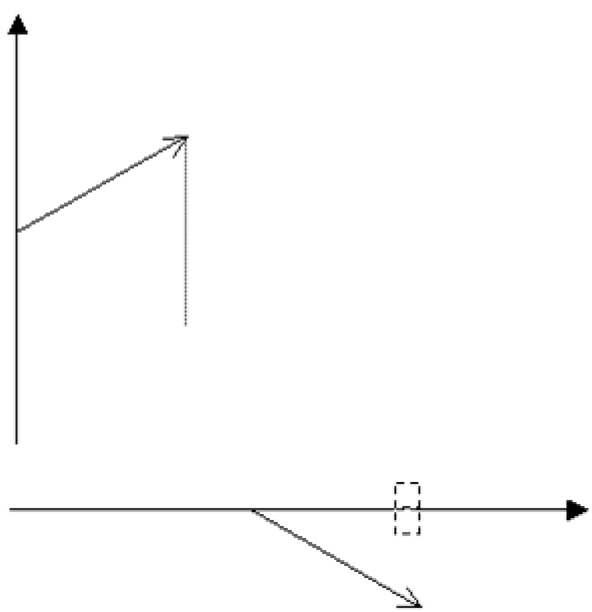
c) Compresión a lo largo del eje x con c=1/2.

5.4 Aplicación de las transformaciones lineales: reflexión, dilatación, contracción y rotación.

Reflexión sobre el eje x

En este caso, queremos averiguar como está definida la transformación T de R2 en R2 que cada vector $\overline{u} = (u_1, u_2)$ lo refleja sobre el eje x, para obtener un vector $T(\overline{u}) = (v_1, v_2)$

En una gráfica, vemos la situación como sigue:



En este caso, la situación es más sencilla ya que claramente tenemos dos triángulos rectángulos que son congruentes, de donde T queda definida como sigue:

$$T(u_1, u_2) = (u_1, -u_2)$$

Esta transformación se llama la reflexión sobre el eje x, y es lineal, ya que:

$$
\begin{aligned}
&T[(u_1, u_2) + \lambda(v_1, v_2)] = T(u_1 + \lambda v_1, u_2 + \lambda v_2) \\
&= (u_1 + \lambda v_1, -u_2 - \lambda v_2) \\
&= (u_1, -u_2) + \lambda(v_1, -v_2) \\
&= T(u_1, u_2) + \lambda T(v_1, v_2)
\end{aligned}
$$

Ejemplo dilatación o expansión

Una dilatación es una transformación que incrementa distancias.

Sea V= (2 4) encontrara la expansión vertical cuando K=2

Expansión horizontal (k71) o contracción (0<k<1)

Expansión vertical (k71) o contracción (0<k<1)

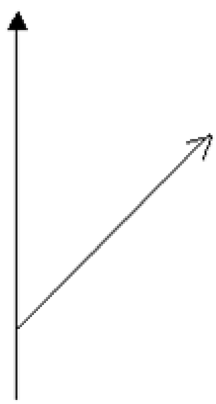
Ejemplo contracción

Una contracción es una transformación que decrece distancias. Bajo una contracción, cualquier par de puntos es enviado a otro par a distancia estrictamente menor que la original.

Sea V= (2 4) encontrara la contracción horizontal cuando K=1/2

Haciendo la grafica el punto disminuye en el eje horizontal.

Rotación por un ángulo θ



Sea $0 \leq \theta < 2\pi$ un ángulo medido en radianes. Queremos averiguar cual es la transformación T de R2 en R2 que gira cada vector $\overline{u} = (u_1, u_2)$ un angulo θ, para obtener un vector

$$T(\overline{u}) = (v_1, v_2)$$

En una gráfica, vemos la situación como sigue:

Si usamos las funciones trigonométricas, tenemos que:

$$v_1 = \|T(\overline{u})\| \cdot \cos(\alpha + \theta) = \|\overline{u}\| \cdot (\cos\alpha \cdot \cos\theta - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

$$v_2 = \|T(\overline{u})\| \cdot \operatorname{sen}(\alpha + \theta) = \|\overline{u}\| \cdot (\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\theta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta)$$

Distribuyendo y usando el hecho de que $u_1 = \|\overline{u}\|\cos\alpha$ y $u_2 = \|\overline{u}\|\operatorname{sen}\alpha$ tenemos que:

$$v_1 = u_1 \cos\theta - u_2 \operatorname{sen}\theta$$
$$v_2 = u_2 \cos\theta + u_1 \operatorname{sen}\theta$$

Por lo tanto, ya descubrimos cómo debe estar definida la transformación $T : \Re^2 \to \Re^2$ tal que

$$T(u_1, u_2) = (u_1 \cos\theta - u_2 \operatorname{sen}\theta, u_2 \cos\theta + u_1 \operatorname{sen}\theta)$$

Esta transformación se llama la rotación por un ángulo θ y es lineal, ya que:

$$\begin{aligned}
&T[(u_1,u_2) + \lambda(v_1,v_2)] = T(u_1 + \lambda v_1, u_2 + \lambda v_2) \\
&= ((u_1 + \lambda v_1)\cos\theta - (u_2 + \lambda v_2)\operatorname{sen}\theta, (u_2 + \lambda v_2)\cos\theta + (u_1 + \lambda v_1)\operatorname{sen}\theta) \\
&= (u_1 \cos\theta - u_2 \operatorname{sen}\theta, u_2 \cos\theta + u_1 \operatorname{sen}\theta) + \lambda(v_1 \cos\theta - v_2 \operatorname{sen}\theta, v_2 \cos\theta + v_1 \operatorname{sen}\theta) \\
&= T(u_1, u_2) + \lambda T(v_1, v_2)
\end{aligned}$$